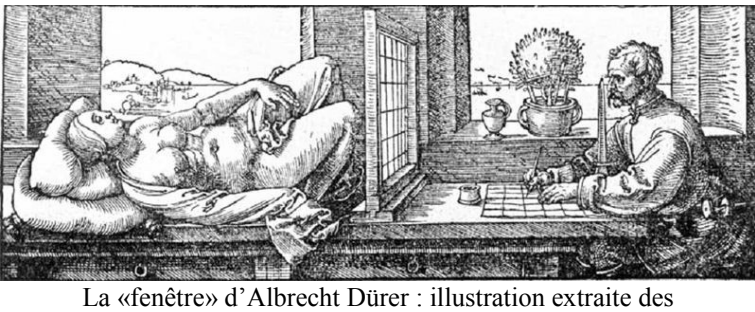
0) Principe de la représentation en perspective : la « fenêtre de Dürer »

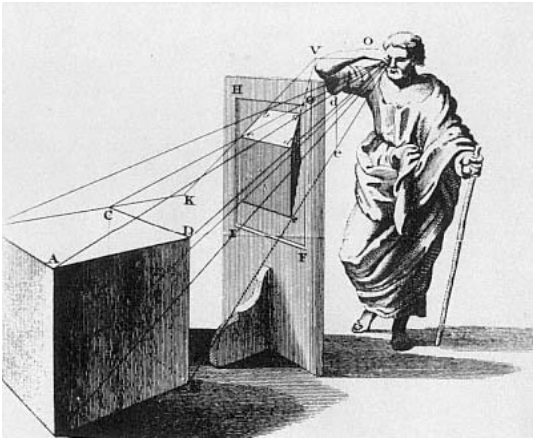
Les artistes de la Renaissance ont étudié comment représenter une scène sur une surface plane, de telle sorte que pour l'observateur, l'œuvre puisse se superposer avec la réalité. Ils sont les premiers à avoir réalisé des œuvres qui, en principe, peuvent se superposer parfaitement avec la scène représentée (celle-ci étant vue du même point de vue que celui de l'artiste).
Ils ont utilisé des dispositifs comme celui gravé par Albrecht Dürer dans la gravure sur bois reproduite ci-dessous ; il s'agit d'appareils qui ont effectivement été utilisés par les artistes, mais qui sont, dans la pratique, d'un maniement assez lourd.



La «fenêtre» d'Albrecht Dürer : illustration extraite des Instructions sur l'art de mesurer (1525).

Schématiquement, on peut décrire ainsi le dispositif :

- la position de l'œil de l'opérateur est fixée grâce à un œilleton
- une « vitre » fixe est placée entre cet œil et l'objet à représenter
- si on considère un point P de l'objet à représenter, le rayon lumineux partant du point P en direction de l'œil du peintre va traverser la vitre en un point P' qui représentera le point P
- dans la gravure de Dürer, un quadrillage sur la vitre permet de repérer le point P' pour pouvoir le placer au bon endroit dans l'œuvre peinte ; mais le rayon lumineux peut également être matérialisé par un fil tendu entre le point P et l'œilleton (voir ci-après).



Vocabulaire et notations pour ce cours :
La situation est modélisée mathématiquement de la façon suivante :

- un point noté « ***O*** » ou « ***Œil*** » modélise l'œil de l'observateur. On l'appelle ***le point de vue***.
- un plan noté « ***v*** » ou « ***vitre*** » modélise la fenêtre sur laquelle est projetée l'image de la scène observée. On l'appelle le ***plan de représentation.***
- l'objet observé est appelé l'objet « ***réel*** » ou « ***initial*** ».
- la représentation dans le plan « ***v*** » est appelée l' « ***image*** »
- l'image d'un point P de l'objet réel est obtenue de la façon suivante : on considère la droite (OP) passant par le point P et l'œil O ; cette droite coupe (en général) le plan de la vitre, en un point P'. Ce point P' est l'image du point P.

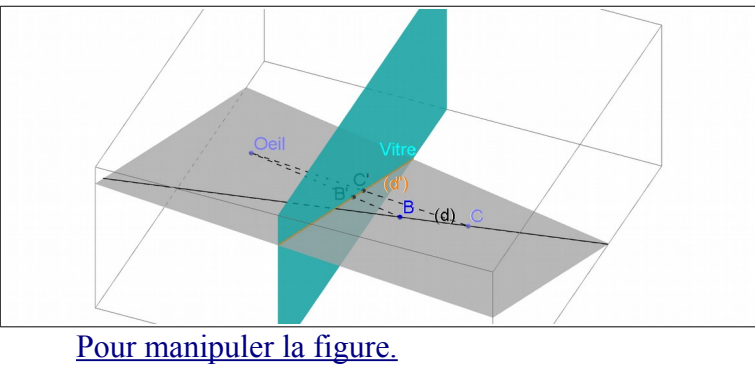
Remarque :
Cette situation est comparable à celle de l'ombre au flambeau (étudiée au premier chapitre) :
Ici, des rayons lumineux passant par le point O projettent une image sur le plan de la vitre. L'image est située ***entre*** l'objet réel et le point O.
Dans le premier chapitre, des rayons lumineux passant par la source ponctuelle S projettent une ombre sur un plan (le sol ou un mur). Mais, l'ombre est située ***derrière*** l'objet réel.

Remarque 2 :
En art, on parle de perspective centrale mais en mathématique on emploie souvent les termes « projection centrale ».

1) Premier point de fuite : point de fuite d'une droite

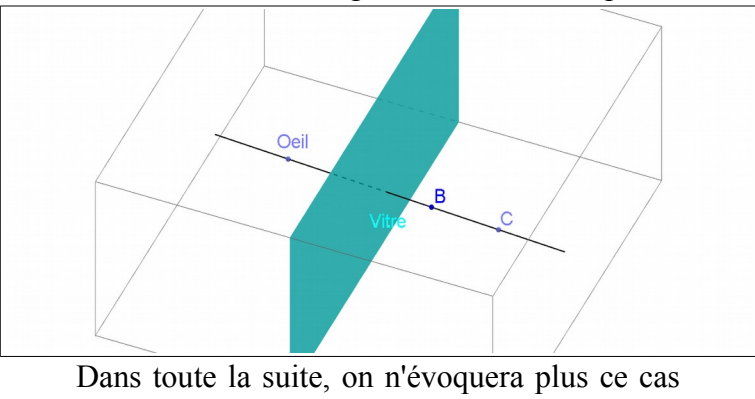
Le but de ce cours est d'étudier la perspective d'un point de vue théorique, sur des exemples très simples, en utilisant les concepts « parallèle / sécant ».
On mentionne classiquement, dans les manuels de dessin en perspective centrale, trois points de fuite (d'où les intitulés des titres 1), 2) et 3) ici). Cependant, ce n'est qu'un point de repère commode pour dessiner. D'un point de vue théorique, il y a une infinité de points de fuite et on peut être amené à en utiliser plus que trois dans certains dessins.

Propriété : l'image d'une droite (réelle) est incluse dans une droite (de la vitre v).



Pour manipuler la figure.

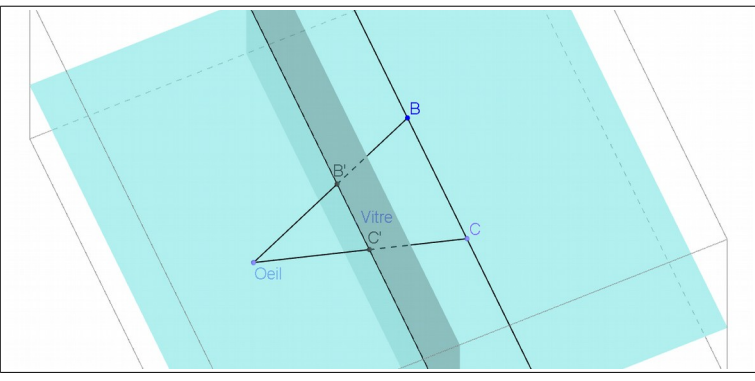
Cas particulier : le cas où la droite (réelle) passe par le point O est un cas particulier : dans ce cas, son image est réduite à un point.



Dans toute la suite, on n'évoquera plus ce cas particulier, c'est à dire qu'on supposera toujours (implicitement) que les droite considérées ne passent pas par O .

Propriété: On se place dans le cas précédent où une droite (réelle) (d) a son image incluse dans une droite (d') du plan de représentation.

Si (d) est parallèle au plan de représentation, alors son image (d') est parallèle à elle-même.

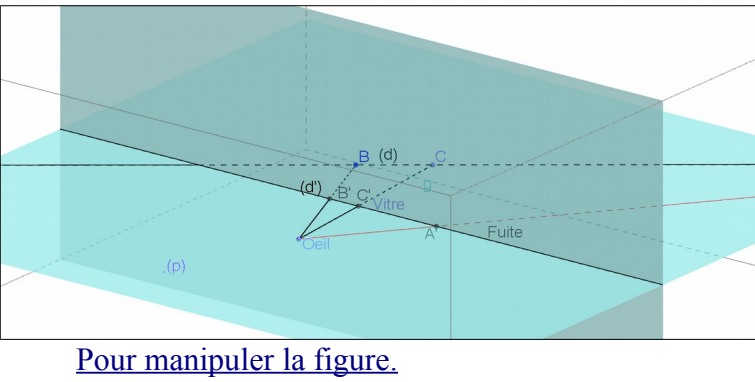


On dit alors que *(d)* est ***frontale*** : on y reviendra dans la suite.

Propriété: On se place dans le cas précédent où une droite (réelle) (d) a son image incluse dans une droite (d') du plan de représentation.

Si (d) n'est pas parallèle au plan de représentation (elle est non frontale), alors :

- chaque point de la droite (d') représente un point de la droite réelle (d), sauf un
- ce point, qui existe dans la droite (d') mais qui ne correspond à aucun point de la droite réelle (d), est appelé ***le point de fuite de la droite (d)***
- ce point de fuite est l'intersection de la droite (d') avec la droite parallèle à (d) passant par le point de vue *Oeil.*



Pour manipuler la figure.

Remarque : Le point de fuite ne correspond à aucun point réel car sinon, le point réel correspondant serait à l'intersection de (d') avec la droite parallèle à (d) passant par le point de vue *Oeil.* Or, bien sûr, deux droites parallèles ne peuvent pas avoir de point d'intersection. Mais on peut aussi imaginer que *ces deux droites parallèles se coupent à l'infini* : c'est pourquoi le point de fuite est parfois appelé « point à l'infini »...

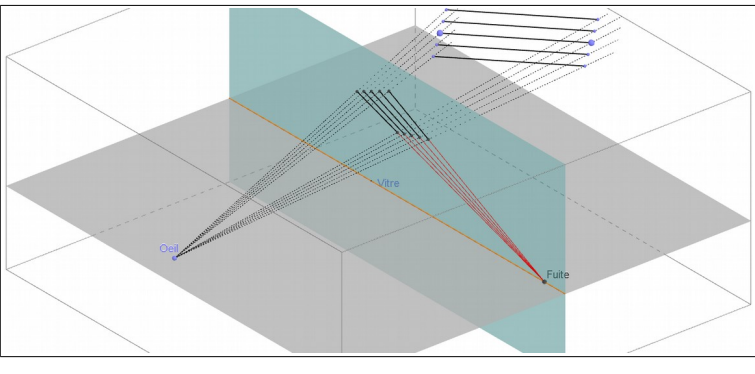
2) Deuxième point de fuite : ligne d'horizon

Propriété : On considère deux droites (réelles) non parallèles au plan de représentation v.
Si ces deux droites sont parallèles entre elles, alors elles ont le même point de fuite.

Remarque 1 : si les droites considérées passent par O ou sont parallèles au plan v, on est dans les cas particuliers évoqués précédemment et les droites n'ont pas de point de fuite...

Remarque 2 : Si on considère plus de deux droites et que toutes sont parallèles entre elles, elles ont deux à deux le même point de fuite... donc elles ont toutes le même point de fuite !

Image ci-dessous: 5 segments noirs parallèles et leurs images dans le plan de représentation.
Les prolongements des 5 images convergent vers le même point de fuite.

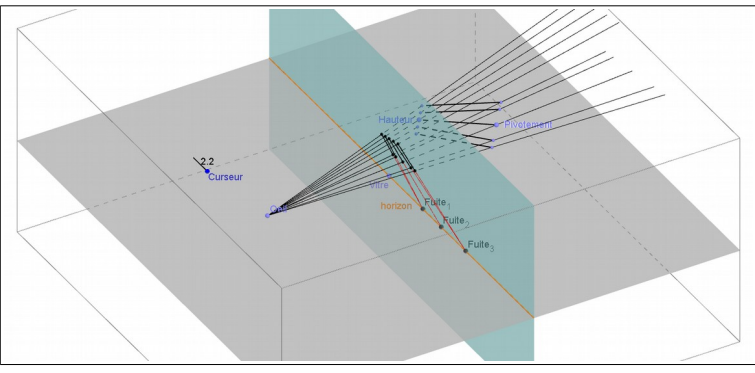


Pour manipuler la figure.

Définition : les droites qui sont perpendiculaires au plan de la vitre sont toutes parallèles entre elles. Elles ont donc toutes le même point de fuite : celui-ci est souvent appelé le ***point de fuite principal***.

Définition : Soit un plan (p), non parallèle à v. Si on considère plusieurs droites qui sont dans le plan (p) mais qui ***ne sont pas*** parallèles entre elles : elles n'ont pas le même point de fuite. Mais, d'après ce qui a été décrit précédemment, leurs différents points de fuite sont tous situés à l'intersection entre le plan de représentation et le plan parallèle à (p) passant par O.
On appelle ***ligne d'horizon du plan (p)*** la droite à l'intersection du plan de représentation v avec le plan parallèle à (p) passant par O.
La ligne d'horizon contient tous les points de fuite des droites du plan (p).

Pour manipuler la figure ci-après.



Définition : si le plan (p) est parallèle au plan de la vitre, ses droites le sont également et n'ont donc pas de point de fuite : c'est pourquoi (p) n'a alors pas de ligne d'horizon.
Dans ce cas, on dit que (p) est un ***plan frontal***.

Propriété : Si deux plans sont parallèles entre eux (mais sont non parallèles à v), alors ils ont même ligne d'horizon.

On peut visualiser cette propriété grâce au fichier accessible depuis ce lien. Si on fait montrer ou descendre le plan contenant les 5 segments, la ligne d'horizon reste inchangée (et les points de fuite également).

Remarque : dans la plupart des scènes représentées en perspectives, beaucoup de droites qu'il faut représenter sont horizontales (les droites situées au sol, au plafond, les alignements du haut des lampadaires dans une rue...).
C'est pourquoi la ligne d'horizon des différents plans parallèles au sol (c'est la même ligne d'horizon pour tous ces plans car ils sont parallèles) est très importante. Bien sûr, cette ligne d'horizon représente ce qu'on appelle tout simplement l'« horizon » dans le langage courant.
Il faut retenir essentiellement deux choses à propos de cet horizon :

- tous les points de fuite des droites horizontales appartiennent à l'horizon
- ***l'horizon est situé à la même hauteur que l'œil de l'observateur, par rapport au sol*** (en effet, il est l'intersection du plan parallèle au sol et passant par O, avec le plan de représentation)

Remarque 2 : Si la vitre est supposée verticale (perpendiculaire au plan horizontal du sol), alors toutes les droites verticales sont

parallèles à la vitre. Elles n'ont donc pas de point de fuite et sont représentées parallèles entre elles.
Si par contre, la vitre n'est pas verticale, la situation est différentes : voir le 3) ci-après.

3) Troisième point de fuite : les verticales

On suppose maintenant que la vitre n'est pas verticale (c'est à dire que l'observateur dirige son regard de façon non parallèle au sol : soit vers le haut, soit vers le bas). Dans ce cas, les droites verticales sont parallèles entre elles, mais pas parallèles à la vitre. Elles ont donc un point de fuite, le même pour toutes les droites verticales.
Si le regard est dirigé vers le bas (vue en plongée), ce point de fuite est situé au dessus de la ligne d'horizon.
Si le regard est dirigé vers le haut (vue en contre-plongée), ce point de fuite est situé en dessous de la ligne d'horizon.

Résumé : supposons qu'on veuille représenter en perspective centrale un cube posé sur le sol.
Les 12 arêtes du cube sont parallèles entre elles quatre par quatre : on a 4 arêtes verticales, 4 arêtes horizontales dans une direction et 4 arêtes horizontales dans une direction perpendiculaire à la direction des 4 précédentes.
Il existe de nombreuses façons de représenter ce cube en perspective centrale, suivant l'emplacement qu'on choisit pour le point de vue O et le plan de représentation v .

1er cas : le plan de représentation est parallèle à une face du cube.
Les 4 arêtes horizontales qui sont parallèles à la vitre, ainsi que les 4 arêtes verticales, n'ont pas de point de fuite et sont représentées respectivement parallèles entre elles, ***dans des plans frontaux***.
Les 4 arêtes horizontales qui restent sont perpendiculaires à la vitre : elles ont un point de fuite, qui est ***le point de fuite principal*** (situé devant l'observateur, à la même hauteur que son œil par rapport au sol).
C'est ce qui est appelé couramment une perspective à un point de fuite.

2e cas : la vitre est verticale, mais pas parallèle aux faces du cube.
Les 4 arêtes verticales sont parallèles à la vitre : elles n'ont pas de point de fuite et sont représentées parallèles entre elles.
Mais aucune des faces du cube n'est dans un

plan frontal. Aucune des 8 arêtes horizontales n'est parallèle à la vitre. 4 arêtes horizontales fuient vers un point de fuite situé à gauche de l'observateur et les 4 autres fuient vers un autre point de fuite, à droite de l'observateur. Ces ***deux points de fuite appartiennent à la ligne d'horizon*** du plan du sol (située à la même hauteur que l'œil de l'observateur par rapport au sol).
C'est ce qui est appelé couramment une perspective à deux points de fuite.

3e cas : la vitre n'est parallèle à aucune arête du cube (elle n'est donc pas verticale).
Les 4 groupes d'arêtes du cube ont chacun un point de fuite : deux appartiennent comme dans le cas précédent à la ligne d'horizon du plan du sol, le 3e est situé au dessus ou en dessous de cette ligne.
C'est ce qui est appelé couramment une perspective à ***trois points de fuite***.

Il existe un ***4e cas*** (la vitre n'est pas verticale mais est parallèle à 4 arêtes du cube. On a alors deux points de fuite, dont un qui est principal...).

On peut aussi être amené à représenter une scène comportant plus que 3 groupes de droites parallèles, comme c'est le cas par exemple s'il y a des plans de toiture qui sont inclinés : dans ce cas on peut avoir plus que trois points de fuite.

4) Propriétés de conservation de la perspective centrale

Propriété de non-conservation :
Les milieux, angles et rapport de longueur ne sont pas conservés en général.
C'est à dire :

- si un point est au milieu d'un segment, son image n'est pas forcément au milieu du segment image
- l'image d'un angle n'aura pas forcément la même mesure que cet angle (en particulier l'image d'un angle droit ne sera pas forcément droit)
- si des segments ont la même longueur ou sont dans un certain rapport de longueurs, leurs images n'auront pas forcément des longueurs égales, ou dans le même rapport.

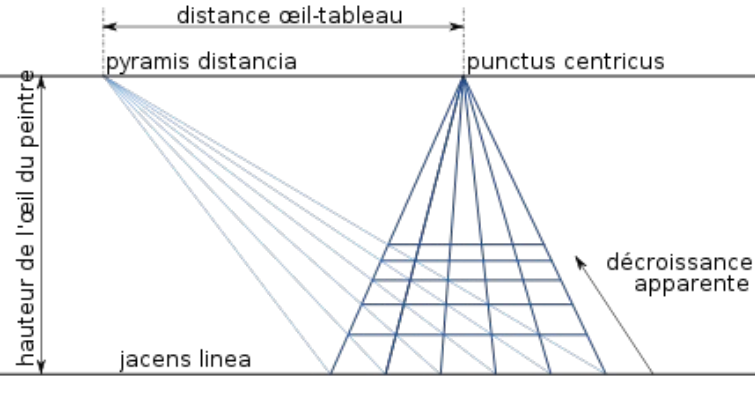
Propriété : L'image d'un objet situé dans un plan frontal n'est pas déformée. Les milieux, angles et rapports de longueur sont conservés ***dans les plans frontaux***.

Propriété de conservation : L'alignement et le contact sont conservés.
C'est à dire :

- si des points sont alignés, alors leurs images seront alignées
- si des objets sont en contact l'un avec l'autre, alors leurs images le seront également.

5) Points de distance

Définition : Les droites (réelles) qui sont perpendiculaires au plan de représentation ont pour point de fuite le point de fuite principal, que l'on note □. On appelle d la distance entre le point de vue O et le plan de représentation : c'est la distance ωO .
Les 2 points de la ligne d'horizon situés à une distance de □ égale à d sont appelés ***les points de distance***.
Sur l'image suivante, on voit le point de distance de gauche, qui est le point de fuite des lignes horizontales formant un angle de 45° par rapport au plan de la vitre.



Perspective, méthode d'Alberti

Source : https://fr.wikipedia.org

Propriété : Le point de fuite d'une droite horizontale faisant un angle de 45° avec le plan de représentation est un des deux points de distance.

Démonstration : Si on appelle D un point de distance, alors ωOD est un triangle rectangle-isocèle... donc ses angles aigus mesurent 45°...

6) Quelques fichiers du GeoGebraTube, pour manipuler des figures :

Comparaison entre la perspective cavalière et la perspective à un point de fuite :
http://www.geogebratube.com/student/m39510

Pavé droit dans une perspective à un point de fuite :
http://www.geogebratube.com/student/m9018

Pavé droit dans une perspective à deux points de fuite :
http://www.geogebratube.com/student/m39511

Idem avec une figure un peu plus complexe (maison) :
http://www.geogebratube.com/student/m166663

Pavé droit dans une perspective à trois points de fuite :
http://www.geogebratube.com/student/m39512

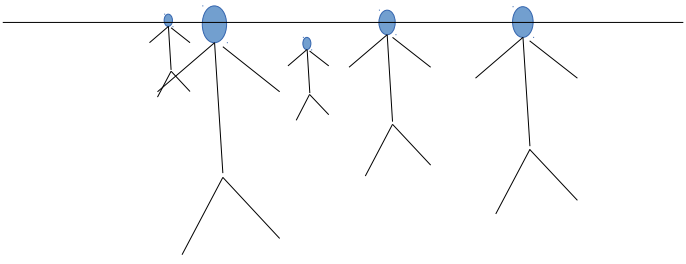
7) Quelques remarques sur le « ressenti » face à une représentation en perspective.

Les points de fuite ne sont pas représentés en tant que tels dans la plupart des images (photos, peintures, etc.).
Cependant, le spectateur les perçoit et il arrive souvent que l'artiste prenne en compte cette perception.
Un exemple célèbre : Masaccio, vers 1427, fresque de 255 x 598 cm, chapelle Brancacci de Santa Maria del Carmine, Florence



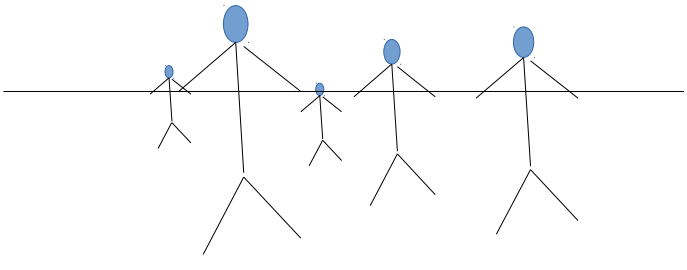
Dans cette œuvre religieuse, on distingue immédiatement le personnage central (Jésus) et tout est fait pour que le spectateur ressente immédiatement qu'il est le personnage central : pour vous en convaincre, cherchez le point de fuite principal à l'aide des lignes du bâtiment représenté à droite...

Le fait que la ligne d'horizon soit située à hauteur des yeux de l'observateur peut également être utilisé.



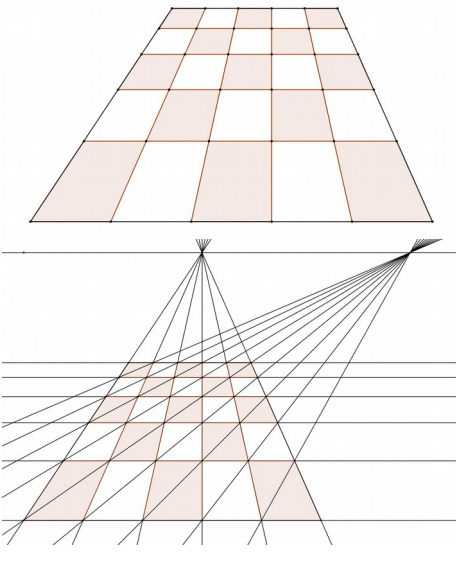
Dans cette vue schématique, il y a 5 personnages dont un enfant et 4 adultes. On ressent tout de suite que l'enfant est le personnage du milieu (alors que le personnage de gauche est de taille adulte, mais éloigné). En effet, tous les autres personnages ont leurs yeux au niveau de la ligne d'horizon, c'est à dire au même niveau que les yeux de l'observateur.

La même scène, mais vue par un enfant (ou un observateur assis) :



On continue de ressentir que le personnage du milieu est plus petit que les autres.
On ressent également que la vue est en contre-plongée, et cela provient uniquement de la façon dont sont placés les personnages par rapport à l'horizon.

Voici enfin trois damiers horizontaux vus en perspective. Seul le premier est correctement construit (voir les traits de construction en dessous).



Là encore, même sans connaître les règles de perspective de façon très approfondie, cela se ressent immédiatement.

